в случае областей, когда граница ∂T представляет собой алгебраическую кривую, заданную неприводимым уравнением

$$P(x,y)=0, \qquad (14)$$

где P – некоторый вещественный полином. Известно, что такая алгебраическая кривая рода $\rho \geq 0$ всегда состоит из $s \leq \rho + 1$ непересекающихся овалов. При решении используется метод симметрии в уточненной трактовке Л. И. Чибриковой [2]. Преобразуем наряду с уравнением (1) к новым переменным z и ζ (5) и уравнение границы (14). Тогда аналитическое продолжение дифференциального уравнения (6) надо рассматривать на римановой поверхности симметрии алгебраического уравнения

$$P\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)=0 \qquad (15)$$

того же рода ρ. И таким образом некоторые граничные задачи для уравнения (1) могут оказаться эквивалентными построению функций, аналитических на римановой поверхности уравнения (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. – 296 с.

2. Чибрикова Л.И. *Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР/ Сер."Математ. анализ " – Т.18. – М.: ВИНИТИ, 1980. – С.3 – 67.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЬНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ. АКУСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

И. И. Ефремов, Е. П. Лукащик

Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар
nauka@kubgau.kuban.ru

Рассматривается задача малых установившихся колебаний тонких профилей в сжимаемой жидкости, ограниченной плоскими твердыми и свободными границами. Для определенности возьмем решетку тонких профилей без выноса с произвольным сдвигом фаз μ колебаний соседних профилей ($\mu = 0$ соответствует двум свободным границам, $\mu = \pi$ – двум твердым).

Безвихревое течение сжимаемой жидкости описывается уравнением Гельмгольца для комплексной амплитуды потенциала скорости

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{1}$$

с условиями непротекания тонкого профиля

$$\varphi_y = V_y(x), \qquad y = 0, \qquad |x| \le 1, \tag{2}$$

и условиями на твердых границах

$$\varphi_y = 0, \qquad y = \pm h, \tag{3}$$

или на свободных границах

$$\varphi = 0, \qquad y = \pm h \tag{4}$$

а также с условиями излучения. Последние означают, что физический смысл имеют лишь решения, соответствующие звуковым волнам, уходящим на бесконечность влево и вправо от колеблющегося профиля.

Полагаем, что зависимость от времени определяется выражением

$$\varphi(x, y, t) = \bar{\varphi}(x, y)e^{i\omega t}, \tag{5}$$

где ω - круговая частота. Приведенная частота $k = \omega c / a$, где c – полухорда профиля, которая в дальнейшем принимается за единицу длины, a – скорость звука.

Колеблющийся профиль создает перепад давлений, пропорциональный разрыву потенциала

$$p_- - p_+ = i\omega\rho(\varphi_+ - \varphi_-) = i\omega\rho\gamma(x), \tag{6}$$

откуда следует, что тонкий профиль можно заменить слоем диполей. При этом давление должно быть непрерывно в точках схода потока при $x = \pm 1$, т. е.

$$\gamma(\pm 1) = 0. \tag{7}$$

Воспользовавшись представлением решений уравнения Гельмгольца в виде интеграла Фурье и удовлетворяя граничным условиям на границах слоя жидкости или на профилях решетки, приходим к выражению для вертикальной вызванной скорости слоя диполей в точках колеблющегося профиля

$$\varphi_y = \frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1}\gamma(s)ds\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\alpha^2 - k^2}\,\frac{sh\left(2h\sqrt{\alpha^2 - k^2}\right)e^{-i\alpha(x-s)}}{ch\left(2h\sqrt{\alpha^2 - k^2}\right) - \cos\mu}\,d\alpha = V_y(x). \tag{8}$$

Однако анализ показывает, что ядро интегрального уравнения (8) имеет неинтегрируемую особенность вида $(x - s)^{-2}$ при $x \to s$. Интегрирование по частям с учетом (7) приводит к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$\frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\gamma}{\partial s}ds\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\alpha^2-k^2}}{\alpha}\frac{sh\left(2h\sqrt{\alpha^2-k^2}\right)e^{-i\alpha(x-s)}}{ch\left(2h\sqrt{\alpha^2-k^2}\right)-\cos\mu}d\alpha=V_y(x),\ |x|<1. \quad (9)$$

Численное решение уравнения (9) можно получить известными методами решения сингулярных интегральных уравнений, например, методом дискретных вихрей, считая, что искомое решение $d\gamma/ds$ имеет интегрируемые особенности при $x\to\pm1$.

Следует заметить, что представление в виде интеграла Фурье является существенным моментом в исследовании аэродинамических процессов в сжимаемых жидкостях. Представление решений уравнения Гельмгольца для решетчатых областей в виде суммы функций Ганкеля, которое широко применялось ранее [1], менее удобно в вычислительном отношении и недостаточно эффективно при анализе физических процессов. Обратим также внимание, что внутренний интеграл в уравнении (9) представляет собой интеграл в комплексной области переменной $\alpha=\sigma+i\tau$ с полюсами первого порядка на мнимой оси, которые могут с ростом k переходить на действительную ось. Число полюсов, перешедших на действительную ось, определяет количество волн, излучаемых колеблющимся профилем. При этом контур интегрирования должен быть деформирован в соответствии с требованиями условия излучения. Так, при $x>s$ контур интегрирования замыкается на нижнюю полуплоскость. При этом учитываются только положительные действительные полюса (они обходятся сверху, а отрицательные – снизу). В итоге ядро интегрального уравнения представляется в виде суммы элементарных функций (вычетов в простых полюсах).

Зависимость суммарного аэродинамического коэффициента нормальной силы на колеблющемся профиле от приведенной частоты $Cy=\int_{-1}^{1}\gamma(s)ds$ не монотонна и имеет резонансный характер. Акустические резонансные явления при колебаниях профилей в сжимаемой жидкости были отмечены еще в 50-е годы. Однако объяснения этого явления еще не являются исчерпывающими. Так, в монографиях [1], [2], а также в цитируемых в них работах зарубежных авторов резонансные частоты, по-видимому, отождествляются с частотами излучаемых профилем волн. Однако, при этих значениях частот ядро интегрального уравнения обращается в бесконечность, и профиль не испытывает давления со стороны жидкости. Указанные частоты являются волноводными частотами канала шириной $2h$ и не являются резонансными для системы «слой газа – колеблющийся профиль» в целом.

Эти частоты определяются в расчетах методом «вынужденных колебаний» по резонансным пикам и падениям.

Для приближенной оценки резонансных частот можно использовать предельное вырождение сингулярных интегральных уравнений при уменьшении толщины слоя. Устремляя $h \to 0$, получаем для умеренных частот k и $\mu \neq 0$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + k^2\gamma = \frac{1-\cos\mu}{h} V_y, \quad \gamma(\pm 1) = 0, \tag{10}$$

что совпадает с уравнением колебаний цилиндрической мембраны. Собственные резонансные частоты для такой мембраны не зависят от h и равны

$$k_n = {}^{n\pi}\!/_{2}. \tag{11}$$

Таким образом, при $\mu \neq 0$ частоты акустического резонанса слабо зависят от ширины канала, что примерно наблюдается в расчетах $\left(k_{1_{h\to\infty}} \approx 0.9, k_{1_{h=0.2}} \approx 1.4\right)$. В то же время при $\mu = 0$ предельное вырождение приводит к другому дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \left(k^2 - \frac{3}{h^2}\right)\gamma = hV_y(x), \tag{12}$$

$$\gamma(\pm 1) = 0.$$

Собственные частоты здесь явно зависят от h, возрастая с уменьшением h:

$$k_n \approx \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{4} + \frac{3}{h^2}}. \tag{13}$$

Расчеты по полному интегральному уравнению дают достаточно близкие к асимптотическим (13) значения резонансных частот для $h < 1$. При больших значениях h заметное влияние на поведение системы оказывают излучение и связанное с ним демпфирование, которые не учитываются уравнениями (10) и (12).

В заключение приведем основные выводы:

1) Использование интеграла Фурье дает преимущество в математическом, вычислительном и физическом аспектах анализа задач колебаний тонких тел в сжимаемой жидкости.

2) Частота акустического резонанса как характеристика системы «слой газа – колеблющийся профиль» в целом отличается от собственных частот колебаний газа в решетчатых областях. Здесь, по-видимому, уместна аналогия с упругой пластиной в несжимаемой жидкости. Она не реагирует на известные собственные частоты коле-

баний в вакууме, а ее собственные частоты уменьшаются вследствие влияния присоединенных масс жидкости.

3) Предельное вырождение сингулярных интегральных уравнений в дифференциальные при малых шагах решетки может служить приближенной математической моделью колебаний тонких профилей в составе решетки и исследования акустического резонанса в таких системах при небольших частотах колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н., Курзин В. Б.,Сарен В. Э. *Аэродинамика решеток в нестационарном потоке.* – Новосибирск: Наука, 1971. – 272 с.
2. Самойлович Г.С. *Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин.* М.: Наука, 1969. – 442 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АСПИРАЦИИ АЭРОЗОЛЯ С УЧЕТОМ ИСПАРЕНИЯ

М.В. Ванюнина, Ш.Х. Зарипов

НИИММ Казанского государственного университета
shamil.zaripov@ksu.ru

Пробоотбор жидких частиц может сопровождаться испарением, что приводит к изменению размеров частицы и её инерционных свойств, следовательно, и к изменению коэффициента аспирации, определяемого как отношение счетной концентрации частиц в измерительном устройстве к концентрации в невозмущенной среде. Предлагается математическая модель аспирации аэрозоля из неподвижного воздуха в щель между двумя пластинами с учетом испарения частиц. Щель образована двумя вертикальными полубесконечными параллельными пластинами. Вдали от щели среда считается неподвижной, а частицы падают под действием силы тяжести. В приближении потенциального течения несжимаемой жидкости записывается аналитическое решение для комплексного потенциала течения несущей фазы [1]. Уравнения движения частиц дополняются уравнением для радиуса частицы R, описывающим изменение размеров частицы в результате испарения, [2]:

$$\frac{dR^2}{dt} = -\frac{DM}{R_g \rho_i}\left(\frac{p_s(T_0)}{T_0} - \frac{p_\infty}{T_\infty}\right), \qquad (1)$$